Příklad 1: Vypočítejte $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, je-li dáno

a) $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 + x - 2$ … $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 2x^2 + x + 1 + \dfrac{x+3}{x^2 + x - 2}$

b) $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 7$, $Q(x) = x - 4$ … $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 5x^2 + 22x + 87 + \dfrac{355}{x-4}$

c) $P(x) = x^5 - x^3 + x - 4$, $Q(x) = x^2 + 3$ … $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = x^3 - 4x + \dfrac{13x - 4}{x^2 + 3}$

d) $P(x) = 3x^4 - x^2 + 5x - 3$, $Q(x) = x^2 - x$ … $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 3x^2 + 3x + 2 + \dfrac{7x - 3}{x^2 - x}$

e) $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 5$, $Q(x) = x^2 + 1$ … $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 4x - 2 - \dfrac{4x+3}{x^2 + 1}$

Příklad 2: Užitím Hornerova schématu vypočtěte hodnotu polynomu $P(x)$ v daném bodě x_0.

a) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$, $x_0 = -2$ $[P(-2) = 3]$
b) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2$, $x_0 = 3$ $[P(3) = 97]$
c) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$, $x_0 = -4$ $[P(-4) = 208]$

Příklad 3: Ověřte, které ze zadaných čísel $x_1, \dots, x_4$ je kořenem polynomu $P(x)$.

a) $P(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x - 6$, $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 5$ $[x_1, x_2]$
b) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4$, $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 4, x_4 = -8$ $[x_2]$
c) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$, $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = 3$ $[x_2, x_3, x_4]$

Příklad 4: Zadaná čísla jsou kořeny polynomu $P(x)$. Předpokládejme, že jiné kořeny nemá. Napište rozklad $P(x)$ na součin kořenových činitelů v $\boldsymbol{R}$.

a) –3, 0, 2, 3, 3, –5 $[\text{např. } P(x) = (x+3)x(x-2)(x-3)^2(x+5)]$

b) –1, –1, 2, 2, 2 $[\text{např. } P(x) = (x+1)^2(x-2)^3]$

c) $-\sqrt{2}$, 0, 0, 1, 4, –4 $[\text{např. } P(x) = (x+\sqrt{2})x^2(x-1)(x-4)(x+4)]$

Příklad 5: Napište normovaný polynom, jehož kořeny jsou čísla:

a) $-1, 1, 3$ $\qquad [P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3]$

b) $-2, -2, 0, 2$ $\qquad [P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x]$

c) $-5, 1, 7$ $\qquad [P(x) = x^3 - 3x^2 - 33x + 35]$

Příklad 6: Určete celočíselné kořeny polynomu $P(x)$ a napište jeho rozklad na součin kořenových činitelů v $\boldsymbol{R}$.

a) $P(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20$ … $1, -1, 2, -2, 5$
$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-5)$

b) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36$ … $1, 3, -3, -4$
$P(x) = (x-1)(x-3)(x+3)(x+4)$

c) $P(x) = x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 26x^2 - 11x - 30$ … $3, -2, -5$
$P(x) = (x-3)(x+2)(x+5)(x^2+1)$

Příklad 7: Vypočtěte všechny kořeny polynomu $P(x)$ a napište jeho rozklad na součin kořenových činitelů v $\boldsymbol{R}$.

a) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 8x$ … $0, -1, 4, \pm i\sqrt{2}$
$P(x) = x(x+1)(x-4)(x^2+2)$

b) $P(x) = x^5 + 2x^4 - 9x^3 - 14x^2 + 20x + 24$ … $-1, 2, 2, -2, -3$
$P(x) = (x+1)(x-2)^2(x+2)(x+3)$

c) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 8x + 12$ … $2, -2, 3, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$
$P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x^2+x+1)$

Příklad 8: Zjistěte, kolikanásobným kořenem polynomu $P(x)$ je zadané číslo x.

a) $P(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x - 20$, $x = 4$ … není kořenem
b) $P(x) = x^6 - 7x^4 - 21x^2 + 27$, $x = -3$ … jednoduchý kořen
c) $P(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16$, $x = 2$ … čtyřnásobný kořen

Příklad 9: Ze zadaných racionálně lomených funkcí $f_1(x),\dots,f_{10}(x)$ vyberte ty, které jsou neryze lomené a rozložte je na polynom a funkci ryze lomenou.

$$f_1(x)=\frac{2x^3+x^2}{x+4} \qquad f_6(x)=\frac{x+1}{x^2+x+4}$$

$$f_2(x)=\frac{5x-4}{x^2} \qquad f_7(x)=\frac{x\sqrt{2}}{x^3+5x^2}$$

$$f_3(x)=\frac{x^2+2}{x^3-x} \qquad f_8(x)=\frac{x^2+5x-2}{2x^2-3}$$

$$f_4(x)=\frac{3x^4-2x+1}{x^2-3} \qquad f_9(x)=\frac{x}{x-5}$$

$$f_5(x)=\frac{x^3}{x^3+x-2} \qquad f_{10}(x)=\frac{x^5+1}{x^3-2x}$$

Výsledky:

$$f_1(x)=2x^2-7x+28-\frac{112}{x+4},\quad f_4(x)=3x^2+9-\frac{2x-28}{x^2-3},\quad f_5(x)=1-\frac{x-2}{x^3+x-2},$$

$$f_8(x)=\frac{1}{2}+\frac{5x-0{,}5}{2x^2-3},\quad f_9(x)=1+\frac{5}{x-5},\quad f_{10}(x)=x^2+2+\frac{4x-1}{x^3-2x}\ .$$